Theoretical Computer Science 44 (1986) 107-110
North-Holland

NOTE

POINTS D'ORBITE DENSE DE CERTAINS LANGAGES DE MOTS INFINIS*

F. BLANCHARD
Laboratoire de Probabilités, Université de Paris 6, 75230 Paris Cedex 05, France

S. MARTINEZ
Departamento de Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 5272 Correo 3, Santiago, Chile

Communicated by D. Perrin
Received October 1985
Revised February 1986

Abstract. It was proved in (Beauquier, Nivat, 1984) that if a doubly infinite word with a rational set of factors is not strongly transitive, then this word is ultimately periodic in both directions. By using some tools of Topological Dynamics, we show that the same conclusion may be reached with an hypothesis weaker than rationality about the set of factors.

1. Introduction

L'un des auteurs [3] a caractérisé les systèmes dynamiques symboliques de type fini qui sont faiblement mais non fortement transitifs: ils se réduisent à une orbite dense unique et à ses deux points d'accumulation périodiques distincts.

Beauquier et Nivat [1] ont démontré un résultat presque identique dans le cas plus général des systèmes sofiques (langages rationnels de mots infinis); ils se réduisent à l'orbite de deux points périodiques, distincts ou non, reliés par une orbite isolée.

Nous montrons ici que leur conclusion découle plus généralement d'une condition de récurrence dans le monoïde syntaxique du langage associé au système, en utilisant largement les propriétés topologiques des objets considérés.

2. Definitions

Soit A un alphabet fini, on note $A^* = \bigcup_{n \geqslant 0} A^n$ l'ensemble des *mots* sur A (A^0 étant le mot vide), qui forme un monoïde pour la concaténation. Si $u \in A^*$ on note $|u|$ sa longueur.

* Cet ouvrage a été en partie financé par le PNUD.

L'espace des suites doublement infinies $A^{\mathbf{Z}} = \{x = (x_n)_{n \in \mathbf{Z}}\}$ est muni de la topologie produit, associée à la distance

$$d(x, y) = \sup\{2^{-|k|} \mid x_k \neq y_k\},$$

pour laquelle il est compact, et le décalage $\sigma: A^{\mathbf{Z}} \to A^{\mathbf{Z}}$,

$$\sigma((x_n)_{n \in \mathbf{Z}}) = (x_{n+1})_{n \in \mathbf{Z}}$$

est un homéomorphisme. On pose $\mathrm{Orb}(x) = \{\sigma^k x \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Pour $x \in A^{\mathbf{Z}}$ et $m > 0$ on écrit $x(n, m) = x_n \ldots x_{n+m-1} \in A^*$ et $L(x) = \{x(, m) \mid n \in \mathbb{Z}, m > 0\}$. Si $u \in A^* \backslash A^0$ on note

$$[u]_n = \{y \in A^{\mathbf{Z}} \mid y(n, |u|) = u\}.$$

Si $S \subset A^{\mathbf{Z}}$ est un fermé invariant par σ, (S, σ) est appelé *système dynamique symbolique* (par les ergodiciens) ou *langage de mots infinis*. Nous noterons en abrégé SDS. Il est déterminé par son *langage associé* (l'ensemble des mots que l'on rencontre dans ses éléments):

$$L(S) = \bigcup_{x \in S} L(x).$$

Pour une démonstration de cette propriété voir [2, Section 17]. L'ensemble de cylindres $\{[u]_n \mid u \in L(S),\ n \in \mathbb{Z}\}$ est une base d'ouverts-fermés de S.

Les SDS forment une famille particulière des *systèmes dynamiques topologiques* (SDT) constitués d'un compact métrique T et d'une bijection bicontinue τ de T.

La relation d'équivalence suivante, définie sur A^* par $L(S)$, est compatible avec la concaténation:

$$(u \sim_S u') \text{ ssi } (vuv' \in L(S) \Leftrightarrow vu'v' \in L(S) \forall v, v' \in A^*).$$

Soit ϕ l'application canonique de A^* dans $A^*/\sim_S$: l'ensemble des classes d'équivalence

$$M(S) = A^*/\sim_S = \{\phi(u) \mid u \in A^*\}.$$

est appelé le *monoïde syntaxique de S.* Il possède un élément absorbant e (sauf lorsque $L(S) = A^* \backslash A^0$) tel que:

$$L(S) = \{u \in A^* \backslash A^0 \mid \phi(u) \neq e\}.$$

L'élément m de $M(S)$ est *récurrent à droite* (respectivement, *à gauche*) si $m \neq e$ et qu'il existe $u \in L(S)$: $m\phi(u) = m$ (respectivement, $\phi(u)m = m$).

Voici maintenant quelques définitions relatives aux SDT, qui sont la traduction d'hypothèses de [1].

Définition 2.1. Soit (T, τ) un SDT, $x \in T$. On dit que x est *d'orbite dense dans T* (respectivement, *d'orbite dense à gauche, d'orbite dense à droite*) si $T = \overline{\mathrm{Orb}(x)}$ (respectivement, $T = \overline{\{\tau^k(x) \mid k < 0\}}$, $T = \overline{\{\tau^k(x) \mid k > 0\}}$).

Dans le cas d'un SDS, ces conditions deviennent: $L(S) = L(x)$ (respectivement, $L(S) = \{x(n, m) \mid n + m < 0, m > 0\}$, $L(S) = \{x(n, m) \mid n, m > 0\}$)

Définition 2.2. Le SDT (T, τ) est *faiblement transitif* (respectivement, *fortement transitif*) s'il existe $x \in T$ d'orbite dense dans T (respectivement, d'orbite dense à gauche *ou* à droite). Les deux définitions de la forte transitivité sont équivalentes pour un SDS à la propriété suivante:

$$\forall u, v \in L(S), \exists x \in S, n > 0 \text{ tels que } x \in [u]_0 \cap [v]_n.$$

Définition 2.3. On dit que (S, σ) est *sofique* si $M(S)$ est fini (c'est-à-dire, si $L(S)$ est rationnel).

Définition 2.4. Un élément $x \in A^{\mathbb{Z}}$ est *ultimement périodique à gauche* (respectivement, *à droite*) s'il existe $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ tels que tous les mots $x(n-(i+1)k, k)$ (respectivement, $x(n+ik, k)$) soient identiques pour $i > 0$.

3. Résultats

Le lemme suivant va être pratiquement notre unique outil.

Lemme 3.1. *Soit (T, τ) un SDT. S'il est faiblement mais non fortement transitif, il existe une orbite dense unique, et si x est l'un de ses éléments, l'ensemble $\{x\}$ est ouvert.*

Démonstration. (1) Puisque τ n'est pas fortement transitif, il existe deux ouverts U, V tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U \cap \tau^{-n} V = \emptyset$. Soit $x \in T$ tel que $\mathrm{Orb}(x) \cap U \neq \emptyset$ et $\mathrm{Orb}(x) \cap V \neq \emptyset$. Si $\tau^k x \in U$, il est impossible que $\tau^{k'} x$ appartienne à V pour $k' < k$: on peut donc définir pour x un dernier temps d'atteinte de U, $t_U(x)$, et un premier temps d'atteinte de V, $t_V(x)$.

(2) Comme τ est faiblement transitif, il existe x' tel que $\overline{\mathrm{Orb}(x')} = S$, donc $\mathrm{Orb}(x') \cap U \neq \emptyset \neq \mathrm{Orb}(x') \cap V$. Nous pouvons choisir x dans cette orbite tel que $t_U(x) = 0$; soit $t = t_V(x) > 0$; posons $U' = U \cap \tau^{-t} V$. U' contient x: montrons que $U' = \{x\}$.

D'abord, par définition de t_U et t_V, $\mathrm{Orb}(x) \cap U' = \{x\}$. Supposons maintenant qu'il existe $y \in U'$, $y \notin \mathrm{Orb}(x)$. T, en tant qu'espace métrique, est séparé: soit W un ouvert contenant y mais pas x. L'ouvert $W \cap U'$ contient aussi y, mais pas x, puisque $x \notin W$, ni $\tau^k x$ pour $k \neq 0$, puisque $\tau^k x \notin U'$. Il y a donc un ouvert non vide que l'orbite de x n'atteint pas: ceci contredit notre hypothèse. Donc $U' = \{x\}$; $\mathrm{Orb}(x)$ est la seule orbite dense, puisque chacun de ses points constitue à lui seul un ouvert. $\square$

Remarque 3.2. Dans le cadre des SDS, le résultat et sa démonstration peuvent se reformuler en remplacant le mot 'ouvert' par 'cylindre': en particulier, il existe un mot u' tel que $[u']_0 = \{x\}$, où x est un élément de l'unique orbite dense.

Formulons maintenant l'hypothèse qui permet d'obtenir le même résultat que [3].

Hypothèse H. *Pour tout m dans* $M(S)\backslash\{e\}$, *il existe* m'_1, m''_1 (*respectivement,* m'_2, m''_2) *tel que* $m'_1 m m''_1$ (*respectivement* $m'_2 m m''_2$) *soit récurrent à droite* (*respectivement à gauche*).

Remarque 3.3. L'Hypothèse H est vérifiée par les systèmes sofiques: cela résulte par un argument standard de la finitude du monoïde syntaxique. Elle est vraie aussi pour les langages non rationnels de la forme suivante: soient X et Y deux codes non rationnels mais synchronisants sur $\{a, b\}$, c une autre lettre. L (ou $L(S)$) sera l'ensemble des facteurs de $X^* \subset Y^*$. Un code X est *synchronisant* s'il existe deux mots u_1, $u_2 \in F(X^*)$ tels que $\forall v = v_1 u_1 u_2 v_2 \in X^*$, alors $v_1 u_1$ et $u_2 v_2$ sont dans X^*.

Proposition 3.4. *Soit S un SDS vérifiant l'Hypothèse* H, *faiblement mais non fortement transitif. Alors* (*il existe une orbite dense unique et*) *les points appartenant à l'orbite dense sont ultimement périodiques à gauche et à droite.*

Démonstration. Appliquons le Lemme 3.1 et la Remarque 3.2; soit x un élément de l'orbite dense, u' un mot de $L(S)$ tel que $[u']_0 = \{x\}$. Appliquons l'Hypothèse H à $\phi(u')$, qui est différent de e puisque $x \in S$: il existe donc un mot $v \in L(S)$, ayant u' pour facteur, tel que $m = \phi(v)$ soit récurrent à droite, c'est-à-dire qu'il existe w avec $\phi(vw) = m$. Alors $\phi(vw^n) = m$ pour tout n positif, et comme $m \neq e$ et que x est d'orbite dense, son orbite doit rencontrer tous les cylindres $[vw^n]_0$. En d'autres termes, pour tout $n > 0$ il existe t_n tel que $x(t_n, |vw^n|) = vw^n$.

Ces instants t_n peuvent être choisis tous identiques: en effet, si ce n'était pas le cas, $\sigma^k x$ appartiendrait à $[v]_0$ pour plusieurs valeurs distinctes de k, en l'occurrence les divers t_n, et, u' étant facteur de v, Orb(x) atteindrait plusieurs fois $[u']_0$.

Donc, pour un certain $t > 0$, pour tout $n > 0$, $x(t, n|w|) = w^n$, ce qui veut dire que x est ultimement périodique à droite. Le raisonnement est similaire à gauche. □

Bibliographie

[1] D. Beauquier and M. Nivat, Sur les ensembles rationnels de facteurs d'un mot bi-infini, Preprint, Publications du LITP 84-64, Université Paris 7, November 1984.

[2] M. Denker, C. Grillenberger and K. Sigmund, *Ergodic Theory on Compact Spaces*, Lecture Notes in Mathematics **527** (Springer, Berlin, 1976).

[3] S. Martinez, Hyperbolic dynamical systems with isolated points, *Lecture Notes in Mathematics* **1007** (Springer, Berlin, 1983) 578–583.